3.6 Movimiento elíptico.

El estudio del movimiento elíptico de un astro se simplifica notablemente introduciendo los ángulos o *anomalías* que definimos a continuación:

Anomalía verdadera : Es el ángulo $V = \widehat{POQ}$ formado por el radio vector del astro Q y la dirección del periastro P (la teníamos ya definida).

Anomalía excéntrica: Es el ángulo $E = \widehat{PCQ}$ formado por la dirección del periastro y el radio CQ', siendo C el centro de la elipse y Q' la intersección con el circulo principal de la elipse, de la normal por el astro Q al eje mayor de la elipse.

Anomalía media: Es el ángulo M descrito con vértice en el foco O, en sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro, por un astro ficticio que gira con velocidad angular igual al movimiento medio $n=2\pi/P$ (P=periodo del movimiento). Si empezamos a contar el tiempo en el instante de paso del astro por el periastro, la anomalía media valdrá nt. En general será:

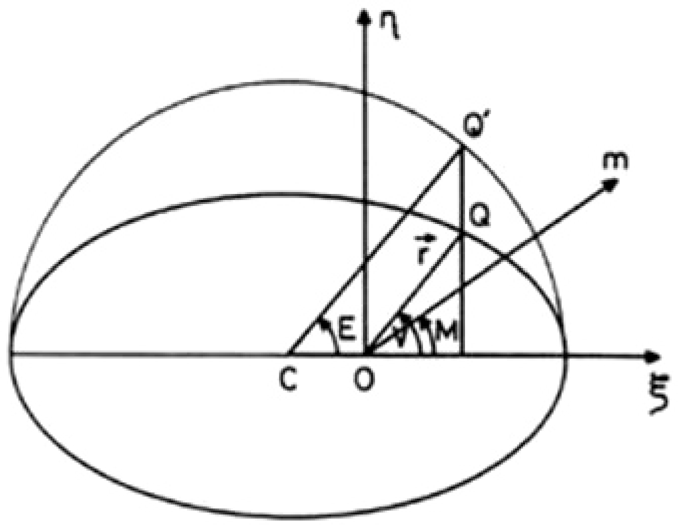

FIG 6.3

$$M = n(t - T) \tag{35.3}$$

donde T es la época de paso por el periastro.

Es cómodo expresar las coordenadas polares de un astro en función de la anomalía excéntrica; para ello, tomemos un sistema de ejes cartesianos ξ, η con origen en el foco O, y sean (ξ, η) las coordenadas del secundario Q en dicho sistema. Se verifica:

$$\xi = r\cos V = CQ_1 - CO = a\cos E - ae = a(\cos E - e)$$
$$\eta = r\,\mathrm{sen}\,V = b\,\mathrm{sen}\,E = a\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\,E$$

(Obteniendo esta segunda ecuación teniendo en cuenta la razón de afinidad de la elipse y la circunferencia).

En resumen, pues:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos V = a(\cos E - e) \\ \eta &= r\,\mathrm{sen}\,V = a\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\,E \end{aligned}\right\} \tag{36.3}$$

y tomando como unidad *a*, en el mismo sistema de ejes

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{a} = \frac{r}{a}\cos V = \cos E - e \\ Y &= \frac{\eta}{a} = \frac{r}{a}\,senV = \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\,E \end{aligned}\right\} \tag{37.3}$$

que son las llamadas *coordenadas reducidas* del secundario.

De las relaciones (36.3) elevando al cuadrado y sumando ordenadamente, tenemos:

$$r^2 = a^2(1 - e\cos E)^2$$

y siendo a>0, e<l, $|\cos E| \le 1$, extrayendo la raíz cuadrada:

$$r = a\ (1 \text{-} e\cos E) \tag{38.3}$$

fórmula que suministra el radio vector en función de la anomalía excéntrica. Si queremos relacionar las anomalías verdadera y excéntrica consideremos la primera de las fórmulas (36.3) y la (38.3):

$$r\cos V = a(\cos E - e)$$
$$r = a(1 - e\cos E)$$

restando miembro a miembro:

$$r(1-\cos V) = a(1 - e\cos E - \cos E + e)$$

o sea:

$$2r\,\mathrm{sen}^2\frac{V}{2} = a(1+e)(1-\cos E) = 2a(1+e)\,\mathrm{sen}^2\frac{E}{2} \tag{39.3}$$

y sumando miembro a miembro:

$$r(1+\cos V) = a(1 - e\cos E + \cos E - e)$$

o sea:

$$2r\cos^2\frac{V}{2}=a(1-e)(1+\cos E)=2a(1-e)\cos^2\frac{E}{2} \tag{40.3}$$

Dividiendo ordenadamente (39.3) y (40.3) y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\tan\frac{V}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \tag{41.3}$$

fórmula que suministra la anomalía verdadera en función de la anomalía excéntrica.

3.6.1 Ecuación de Kepler

Relacionemos, finalmente, las anomalías media y excéntrica. Partiendo de la ley de las áreas en su forma polar

$$r^2\frac{dV}{dt}=c \tag{42.3}$$

y recordando que $c=2\dot{A}=nab$, se tiene:

$$2dA=nabdt=r^2dV$$

e integrando entre *O* y *V*, valores que corresponden respectivamente a la época *T* de paso por el periastro ya una época *t* cualquiera, tenemos:

$$\int_T^t ndt=\frac{1}{ab}\int_0^V r^2dV$$

o sea:

$$n(t-T)=\frac{1}{ab}\int_0^V r^2dV \tag{43.3}$$

Para efectuar la integración indicada, calculemos *dV* diferenciando en (41.3):

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{\cos^2\frac{V}{2}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1}{2}\frac{dE}{\cos^2\frac{E}{2}}$$

de donde:

$$dV=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos^2\frac{V}{2}}{\cos^2\frac{E}{2}}dE$$

y teniendo en cuenta (40.3), sustituyendo y simplificando:

$$dV=\frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}dE=\frac{b}{r}dE$$

Sustituyendo en la integral (43.3), recordando que $r=a(1\text{-}e\cos E)$, resulta:

$$M = \frac{1}{ab}\int_0^V r(rdV) = \frac{1}{ab}\int_0^E a(1-e\cos E)bdE = \int_0^E (1-e\cos E)dE$$

o sea:

$$M = E - e\,\mathrm{sen}\,E \tag{44.3}$$

relación buscada que recibe el nombre de *ecuación de Kepler.*

3.6.2 Métodos de resolución de la ecuación de Kepler

Observemos en primer lugar que si en (44.3) damos a M un valor comprendido entre $k\pi$ y $(k+1)\pi$, con k entero, dicha ecuación admite una única raíz entre tales límites. En efecto, si ponemos

$$F(E) = E - e\,\mathrm{sen}\,E - M$$

se tiene:

$$F(k\pi) = k\pi - M < 0$$

y

$$F((k+1)\pi) = (k+1)\pi - M > 0$$

Además,

$$\frac{dF(E)}{dE} = 1 - e\cos E > 0 \qquad \text{siempre;}$$

luego, la función $F(E)$ es creciente en el intervalo $(k\pi, (k+1)\pi)$ y toma en sus extremos valores de signos contrarios. Luego tiene una única raíz en dicho intervalo.

Entre el gran número de métodos para resolver la ecuación de Kepler citaremos:

a)Método gráfico (o de Dubois). Dibujada una sinusoide, expresando el argumento en radianes, por P tal que $OP=M$ se traza una recta que forme con el eje de abscisas un ángulo α, tal que

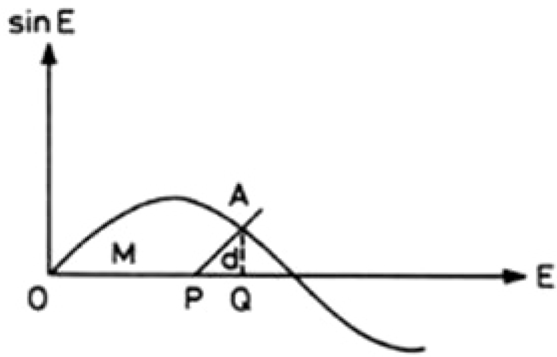

FIG 7.3

$$\cot\alpha = e$$

La abscisa *OQ* del punto *A* de intersección de dicha recta con la sinusoide es *OQ*=*E*. En efecto,

$$E = OQ = OP + PQ = OP + QA\cot\alpha = M + e\,\mathrm{sen}\,E$$

Si la escala es grande, en la mayoría de los casos, este método permite obtener *E* con una aproximación de 1°, sirviendo este valor aproximado como argumento inicial para aplicar otros métodos.

b) *Método numérico* (o de Newton). Sirve para corregir el valor de la anomalía excéntrica dada por el procedimiento anterior.

Supongamos que por el método gráfico hemos encontrado una anomalía E_O. Sustituyendo en la ecuación de Kepler tenemos:

$$M_o = E_o - e\,\mathrm{sen}\,E_o \qquad (45.3)$$

Si M es el valor exacto de la anomalía media y E el valor exacto de la anomalía excéntrica, tenemos:

$$\Delta M_o = M - M_o$$

o lo que es lo mismo:

$$M = M_o + \Delta M_o$$

y

$$E = E_o + \Delta E_o \qquad (46.3)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Kepler:

$$\begin{aligned} M_0 + \Delta M_0 &= E_0 + \Delta E_0 - e\,\mathrm{sen}(E_0 + \Delta E_0) = \\ &= E_0 + \Delta E_0 - e\,\mathrm{sen}\,E_0 \cos\Delta E_0 - e\cos E_0\,\mathrm{sen}\,\Delta E_0 \end{aligned}$$

y siendo ΔE_o muy pequeño y teniendo en cuenta (45.3)

$$\Delta M_0 = \Delta E_0 - e\Delta E_0 \cos E_0$$

O sea:

$$\Delta E_0 = \frac{\Delta M_0}{1 - e\cos E_0}$$

donde e está expresado en radianes. Conocido ΔE_o con (46.3) tendremos el valor de E. Llamémosle E_1. Podemos hallar el correspondiente valor de M_1. Si en el orden de aproximación requerida $M_1=M$ daremos por terminado el proceso; si no, seguiremos.

Existen tablas que suministran directamente E en función de e y de M. Este valor de E es aproximado y se corrige con el proceso que acabamos de exponer.

c) *Método de Kepler*. De la ecuación de Kepler, tenemos:

$$E = M + e \operatorname{sen} E$$

con e y M dados. Tomando en el segundo miembro como E aproximada el valor de M, resulta:

$$E_1 = M + e \operatorname{sen} M$$

Tomando ahora, como E aproximada el valor E_1 obtenido:

$$E_2 = M + e \operatorname{sen} E_1$$

Repitiendo el proceso iterativamente, podemos obtener la anomalía excéntrica con la precisión deseada.

En general:

$$E_i = M + e \operatorname{sen} E_{i-l} \quad (i = 2,3,4...)$$

d) *Método del desarrollo en serie*. Consiste en expresar E por desarrollo en serie de Mac-Laurin de potencias de e, considerando M como parámetro. Lo estudiaremos en el apartado siguiente formando parte de un contexto más general.